

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ПУЩИНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ БИОЛОГИИ

ПРЕПРИНТ

А. М. МОЛЧАНОВ

**Уравнение Риккати,
 $y' = x + y^2$,
для функции Эйри**

ПУЩИНО - 1995

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ПУЩИНСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ БИОЛОГИИ

ПРЕПРИНТ

А. М. МОЛЧАНОВ

**Уравнение Риккати,
 $y' = x + y^2$,
для функции Эйри**

ПУЩИНО - 1995

Построено разложение решения уравнения Риккати в ряд по решениям линейных уравнений.

Для случая квазипостоянных коэффициентов ряд сходится абсолютно и равномерно на всей оси, причем сходимость Ньютонаского типа. Ограниченнное решение уравнения Риккати разлагается в ряд по ограниченным решениям линейных уравнений.

На границе света и тени геометрической оптики (точка поворота в квантовой механике) найдено нулевое приближение, приводящее к уравнению Риккати с квазипостоянными коэффициентами.

Существенные особенности предложенного подхода:

- изучается уравнения Риккати, а не уравнение Штурма-Лиувилля,
- ищется комплексное, а не действительное решение,
- строится итерационный процесс, а не асимптотический ряд,
- нулевое приближение задается параметрически, а не явно,
- нулевое приближение строится в целом, а не локально.

Введение

Если в общем уравнении Риккати,

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

свободный член $a(x)$ мал, то приближенное решение $y \approx u$ можно найти из линейного уравнения:

$$u' = a(x) + b(x)u.$$

Вводя "невязку" y_1 ,

$$y = u + y_1,$$

получаем для "остаточного члена" y_1 снова уравнение Риккати,

$$y'_1 = a_1(x) + b_1(x)y_1 + c_1(x)y_1^2,$$

но с измененными коэффициентами:

$$a_1(x) = c(x)u^2(x), \quad b_1(x) = b(x) + 2c(x)u(x), \quad c_1(x) = c(x).$$

Новый свободный член $a_1(x)$ содержит множитель $u^2(x)$. Так как решение $u(x)$ мало, если мал свободный член $a(x)$, то $a_1(x)$ еще меньше, чем $a(x)$. Это обстоятельство подсказывает идею итерационного процесса и дает надежду на быструю сходимость. Можно показать, что этот процесс равносителен методу Ньютона (с нулевым приближением $y = 0$)

1. Формальный ряд.

Повторим многократно выделение главного члена. Мы получим разложение решения общего уравнения Риккати,

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

в формальный ряд с остаточным членом y_{n+1} :

$$y = u + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots + y_{n+1},$$

Здесь и далее нулевой индекс опущен.

Члены этого ряда суть решения линейных уравнений:

$$u'_n = a_n(x) + b_n(x)u_n(x).$$

Коэффициенты $a_{n+1}(x)$, $b_{n+1}(x)$, $c_{n+1}(x)$ следующего уравнения вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} a_{n+1}(x) &= c_n(x)u_n^2(x), \\ b_{n+1}(x) &= b_n(x) + 2c_n(x)u_n(x), \\ c_{n+1}(x) &= c_n(x). \end{aligned}$$

Полученный ряд простотой перехода $n \rightarrow n+1$ выгодно отличается от формального степенного ряда. Однако построение каждого члена ряда требует решения дифференциального уравнения, а не алгебраических выкладок, как в случае степенного ряда.

2. Линейное уравнение.

Доказательство сходимости формального ряда основано на оценке общего члена ряда.

Оценка вытекает из леммы об ограниченном решении, которая имеет и самостоятельную ценность.

ЛЕММА об ограниченном решении.

Если в линейном уравнении с комплексными коэффициентами:

$$u' = a(x) + b(x)u$$

коэффициент $a(x)$ ограничен,

$$|a(x)| \leq a,$$

а коэффициент $b(x)$ лежит в правой полуплоскости:

$$\operatorname{Re}\{b(x)\} \geq p > 0$$

то это уравнение имеет частное решение, ограниченное на всей оси:

$$|u(x)| \leq u = a/p$$

Доказательство

Линейное уравнение сводится к квадратурам методом вариации произвольной постоянной. Для частного решения с асимптотическим поведением (при $x \rightarrow \infty$),

$$u(x) \approx -a(x)/b(x),$$

справедлива интегральная формула:

$$u(x) = - \int_x^\infty a(s) \exp\left\{-\int_x^s b(r) dr\right\} ds.$$

Эта формула верна в предположении $\operatorname{Re}\{b(x)\} > 0$. Из нее вытекает оценка:

$$|u(x)| \leq \int_x^\infty |a(s)| \exp\left\{-\int_x^s \operatorname{Re}\{b(r)\} dr\right\} ds$$

Неравенства для функций $a(x)$ и $b(x)$ существенно упрощают эту оценку:

$$|u(x)| \leq \int_x^{\infty} a \exp\left\{-\int_x^s p dr\right\} ds$$

Последний интеграл вычисляется точно подстановкой $s - x = t$:

$$\int_x^{\infty} a \exp\left\{-\int_x^s p dr\right\} ds = a \int_0^{\infty} \exp\{-pt\} dt = a/p$$

и мы получаем требуемую оценку для $|u(x)|$:

$$|u(x)| \leq u = a/p.$$

Заметим, что знак равенства достигается для постоянных коэффициентов и только для них. Заметим также, что найденное решение единственno. Любое другое решение неограничено при $x \rightarrow \infty$.

3. Мажоранта

Вернемся к формальному ряду и предположим, что выполнены неравенства:

$$|a_n(x)| \leq a_n, \quad \operatorname{Re}\{b_n(x)\} \geq p_n > 0, \quad |c_n(x)| \leq c_n.$$

Докажем, что для $n+1$ верны аналогичные неравенства. Применяя основную лемму к уравнению для $u_n(x)$, получаем неравенство:

$$|u_n(x)| \leq u_n = a_n/p_n.$$

Имеем далее оценку для $a_{n+1}(x)$:

$$|a_{n+1}(x)| = |c_n(x)u_n^2(x)| \leq c_n(a_n/p_n)^2,$$

которая определяет a_{n+1} :

$$a_{n+1} = c_n(a_n/p_n)^2.$$

Аналогичная оценка для $\operatorname{Re}\{b_{n+1}(x)\}$:

$$\operatorname{Re}\{b_{n+1}(x)\} = \operatorname{Re}\{b_n(x) + 2cu_n(x)\} \geq (p_n - 2a_n c_n / p_n),$$

позволяет определить p_{n+1} :

$$p_{n+1} = p_n - 2a_n c_n / p_n.$$

Итак, построен переход $n \rightarrow n+1$ для мажорирующих констант a_n, p_n .

Для формальной полноты следует добавить равенство

$$c_{n+1} = c_n.$$

Не доказано, однако, необходимое для следующего шага неравенство:

$$p_{n+1} > 0$$

Более того, вообще говоря, это неверно и становится верным только для сходящегося ряда.

Заметим, что знаки равенства во всех оценках дают итерационный процесс для уравнения с постоянными положительными коэффициентами:

$$y' = a + py + cy^2,$$

которое естественно назвать мажорирующим уравнением. Ниже будет показано, что достаточное условие сходимости определяется неравенством:

$$4ac \leq p^2,$$

которое совпадает с условием существования действительной стационарной точки этого уравнения. Можно, поэтому, сказать, что "процесс сойдется, если есть куда сходиться".

4. Итерационный процесс.

Итерационный процесс порождает, как показано, отображение в плоскости a, p :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= c_n (a_n/p_n)^2, \\ p_{n+1} &= p_n - 2a_n c_n / p_n. \end{aligned}$$

Анализ этого отображения существенно упрощается, если ввести вместо a_n "безразмерное" переменное Θ_n ,

$$\Theta_n = 4a_n c_n / p_n^2.$$

В плоскости Θ, p отображение:

$$\begin{aligned} \Theta_{n+1} &= [\Theta_n/(2-\Theta_n)]^2, \\ p_{n+1} &= p_n(1-\Theta_n/2), \end{aligned}$$

оказывается "треугольным" в том смысле, что оно распадается на одномерное отображение для Θ (Θ выражается "само через себя") и одномерное отображение (но при известном уже Θ) для p .

Аналогичная формула получается и для a :

$$a_{n+1} = a_n(\Theta_n/4x).$$

5. Сходимость.

Одномерное отображение для параметра обладает важным свойством – отрезок $0 \leq \Theta \leq 1$ переходит в себя. Если

$$0 \leq \Theta \leq 1,$$

то это неравенство сохраняется при всех n :

$$0 \leq \Theta_n \leq 1.$$

Последовательности a_n и p_n допускают оценку (a_n сверху, а p_n снизу) геометрическими прогрессиями:

$$a_n \leq a/4^n, \quad p_n \geq p/2^n,$$

откуда вытекает оценка для членов ряда:

$$|u_n(x)| \leq a_n/p_n \leq u/2^n,$$

гарантирующая равномерную и абсолютную сходимость ряда.
Поэтому условие,

$$0 \leq \theta_n \leq 1,$$

является достаточным условием сходимости.

Заметим что при строгом неравенстве:

$$\theta < 1,$$

возникает более быстрая сходимость "типа Ньютона".
Происходит удвоение числа верных знаков за каждый шаг:

$$\log \theta_{n+1} \approx 2 \log \theta_n.$$

Приведем пример сходимости для случая $\theta = 1/2$:

$$\theta = 1/2, \quad \theta_1 = 1/9, \quad \theta_2 = 1/289, \quad \theta_3 = 1/332929\dots$$

Следовательно уже третья итерация дает более пяти верных знаков.

6. Пример. Постоянные коэффициенты.

Для постоянных коэффициентов процесс сходится к корню квадратного уравнения:

$$a + by + cy^2 = 0.$$

Члены ряда вычисляются точно при любом n ,

$$u_n = -a_n/b_n,$$

и мы получаем рекуррентные соотношения:

$$a_{n+1} = c_n(a_n/b_n)^2, \quad b_{n+1} = b_n - 2a_n c_n/b_n, \quad c_{n+1} = c_n,$$

для решения квадратного уравнения. Введя "безразмерную" (на этот раз комплексную!) переменную ϑ ,

$$\vartheta_n = 4a_n c_n / b_n^2.$$

получаем для одномерное (как и в общем случае) отображение:

$$\vartheta_{n+1} = [\theta_n/(2-\theta_n)]^2.$$

гарантирующее быструю сходимость ряда для y , если выполнено условие:

$$|\vartheta| = \theta < 1$$

Ряд сходится быстрее, чем в общем случае. Причина - знаменатель, где b стоит "целиком", а не только действительная часть, как в общем случае.

Кроме того, сходимость наблюдается в большей области.
Нетрудно показать, что условие

$$\operatorname{Re} \vartheta \leq 1,$$

также является достаточным условием сходимости, ибо эта полуплоскость – прообраз единичного круга ($|y| \leq 1$).

Так, например, для уравнения, определяющего "золотое сечение",

$$y^2 + y - 1 = 0, \\ a = 1, \quad b = 1, \quad c = -1,$$

Поэтому $y = 4ac/b^2 = -4$. Но уже на первом шаге мы попадаем внутрь единичного круга и следующие итерации быстро убывают:

$$\vartheta_1 = 4/9, \quad \vartheta_2 = 4/49, \quad \vartheta_3 = 4/2209, \quad \vartheta_4 = 4/19509889 \dots$$

7. Обобщение.

Изложенные соображения допускают обобщение. Во-первых, как уже сказано, коэффициенты могут быть комплексными. Во-вторых они могут быть разрывными (кусочно-непрерывными). И, наконец, в-третьих допустимо изменение независимого переменного, что равносильно умножению коэффициентов на положительный общий множитель.

Рассмотрим общее уравнение Риккати,

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

и введем новое переменное Y ,

$$Y = N(x)y.$$

Возникает уравнение для Y :

$$NY' = A(x) + B(x)Y + C(x)Y^2,$$

коэффициенты которого имеют вид:

$$A(x) = a(x)N^2(x), \\ B(x) = b(x)N(x) + N'(x), \\ C(x) = c(x).$$

Применяя полученные выше простые условия сходимости к этому уравнению, можно найти обобщенные достаточные условия, более эффективные в приложениях.

Полезно сформулировать результат в удобном для приложений виде.

Теорема

Пусть дано общее уравнение Риккати,

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2$$

Если найдется положительная функция $N(x)$, такая что имеют место оценки:

$$|a(x)N^2(x)| \leq A, \quad |c(x)| \leq C, \\ N(x)\operatorname{Re}\{b(x)\} + N'(x) \geq P,$$

причем "безразмерная" константа θ не больше единицы,
$$\theta = 4AC/P^2 \leq 1,$$

то ряд

$$y = u + u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится не медленнее геометрической прогрессии:

$$|u_n(x)| N(x) \leq u/2^2.$$

8. Построение нулевого приближения.

Уравнения, реально возникающие на практике, редко удовлетворяют условиям теоремы. Основная трудность – необходимость большой действительной части y коэффициента $b(x)$ при линейном члене. Именно это условие обеспечивает абсолютную сходимость итерационного процесса.

Рассмотрим простейшие уравнение Риккати с переменными коэффициентами:

$$S' = x + S^2.$$

Это уравнение соответствует функции Эйри. Оно же и наихудшее для теоремы – в нем линейный член просто отсутствует. Представим, поэтому, искомое комплексное решение $S(x)$ в виде суммы главного члена $q(x)$ и поправки y :

$$S = q(x) + y.$$

Для y возникает, конечно, общее уравнение Риккати,

$$y' = a(x) + b(x)y + c(x)y^2,$$

коэффициенты которого выражаются через комплексную функцию $q(x)$:

$$a(x) = q^2(x) + x - q'(x), \quad b(x) = 2q(x), \quad c(x) = 1.$$

Покажем, что можно подобрать $q(x)$ так, чтобы удовлетворялись условия теоремы.

Понятно, что это самая трудная часть всей работы. Наиболее удачной оказалась идея, восходящая к Эйлеру – задать $q(x)$ параметрически, вводя новое независимое переменное z :

$$x = x(z), \quad q = q(z).$$

Асимптотическое равенство $x + z^2 \approx 0$, вытекающее из условия ограниченности $a(x)$, определяет главные члены,

$$x \approx -z^2, \quad q \approx z,$$

а луч $x \rightarrow \infty$ приводит к мнимым значениям z и вынуждает выход в комплексную плоскость z .

Несложные групповые соображения (типа автомодельности) показывают, что следует ожидать разложения по обратным степеням z^3 . Оставляя первые два члена, имеем:

$$x = -z^2 + k/z, \quad q = z + m/z^2.$$

Отыскание $q(x)$ сводится, поэтому, к выбору чисел k и m .

Найдем свободный член $a(x)$:

$$a(x) = q^2(x) + x - q'(x) = q^2 - z^2 + \frac{k}{z} - \frac{dq/dz}{dx/dz}.$$

Вычисляя производные, раскрывая скобки и приводя подобные, получаем:

$$a(x) = \frac{k+m+1/2}{z} + \frac{m^2}{4z^4} - \frac{1}{z^4} \frac{k/2+m}{2+k/z^3}.$$

Приравняем нулю коэффициент при старшем (на бесконечности по z) члене и коэффициент при "опасном" третьем члене:

$$k+m+1/2=0, \quad k/2+m=0.$$

Эти два уравнения однозначно определяют k и m :

$$k = -1, \quad m = 1/2.$$

Такой выбор существенно упрощает дальнейшие оценки.

Итак, мы нашли нулевое приближение, $q = q(x)$, в параметрической форме:

$$x = -z^2 - 1/z, \quad q = z + 1/4z^2.$$

Коэффициенты имеют вид:

$$a(x) = \frac{1}{16z^4}, \quad b(x) = 2z + 1/2z^2, \quad c(x) = 1.$$

Найденная функция $z = z(x)$, имеет точку ветвления. Это весьма существенное обстоятельство. Прообраз действительной оси x на плоскости z имеет излом.

Из условия обращения в нуль производной,

$$dx/dz = -2z + 1/z^2.$$

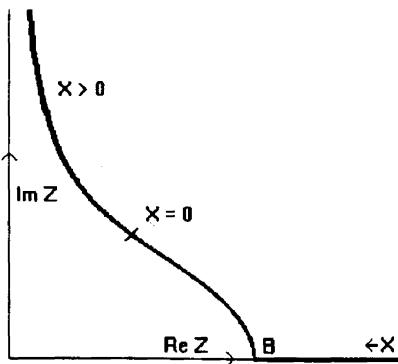
находим координаты точки ветвления.

$$z_0 = 1/\sqrt[3]{2}, \quad x_0 = -3/\sqrt[3]{2}.$$

Так как точка ветвления лежит на действительной оси x , то прообраз действительной оси x на плоскости z имеет излом (угловую точку) именно в этом месте.

Эта кривая состоит из двух ветвей. Одна ветвь - горизонтальная - возникает при движении z направо вдоль действительной оси. Более точно, положительный луч оси z

$(1/\sqrt[3]{2} < z < +\infty)$ переходит в отрицательный луч оси x
 $(-3/\sqrt[3]{2} > z > -\infty)$



Другая ветвь - вертикальная - начинается в той же точке ветвления. Но теперь z начинает двигаться вертикально вверх, а затем асимптотически приближается к мнимой оси z . На этой ветви x проходит нуль и выходит на асимптотику $x \rightarrow \infty$.

Вертикальная ветвь.

На этой ветви $\operatorname{Re}\{q(x)\} \rightarrow 0$, и правильный выбор $N(x)$ имеет решающее значение. Впрочем, выражение для $B(x)$ делает этот выбор практически однозначным:

$$N(x) = r^2.$$

Из формул для коэффициентов нетрудно вывести, что

$$|A(x)| \leq 1/16, \quad |C(x)| \leq 1.$$

Остается самое трудное - оценка $\operatorname{Re}\{B(x)\}$.

$$B(x) = 2Nq(z) + \frac{dN/dz}{dx/dz}.$$

Рассмотрим прообраз действительной оси x на плоскости z . Выкладку удобно вести в полярных координатах на плоскости z :

$$z = r \exp(i\varphi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Подставим это выражение в формулу для x :

$$x = -z^2 - 1/z$$

и разделим действительную и мнимую части:

$$x = r^2 \cos 2\phi - \frac{1}{r} \cos \phi,$$

$$0 = r^2 \sin 2\phi - \frac{1}{r} \sin \phi.$$

Из второго уравнения находим связь между r и ϕ :

$$2r^3 \cos \phi = 1,$$

Это соотношение позволяет исключить "тригонометрию" и выразить через r все величины, нужные для вычисления $\operatorname{Re}\{B(x)\}$:

$$x = r^2 - r^{-2}, \quad dx/dr = 2r + 4/r^5,$$

$$\operatorname{Re}\{q(x)\} = r^{-2}/4 - r^{-8}/8.$$

Перепишем выражение для $\operatorname{Re}\{B(x)\}$ в переменной r :

$$\operatorname{Re}\{B(x)\} = 2N(x)(r^{-2}/4 + r^{-8}/8) + \frac{dN/dr}{dx/dr}.$$

Подставляя найденные величины, получаем ответ:

$$\operatorname{Re}\{B(x)\} = 2r^2(r^{-2}/4 + r^{-8}/8) + 2r/(2r + 4r^{-6}).$$

Заметим, что асимптотически (при $r \rightarrow \infty$) второе слагаемое вдвое больше первого:

$$\operatorname{Re}\{B(x)\} = 1/2 + 1,$$

и именно оно обеспечивает (асимптотически) малость Θ , нужную для сходимости ряда.

Вычислим точное значение $\inf \operatorname{Re}\{B(x)\}$:

$$\inf \operatorname{Re}\{B(x)\} = \min \left\{ 1/2 + r^{-6}/4 + 1/(1 + 2r^{-6}) \right\}.$$

Минимум этой функции нетрудно найти и он оказывается, конечно, меньше асимптотического значения 1.75, но, к счастью, ненамного:

$$\inf \operatorname{Re}\{B(x)\} = (3 + 4\sqrt{2})/8 \approx 1.082.$$

Итак на вертикальной ветви получены оценки:

$$|A(x)| \leq 1/16, \quad |C(x)| = 1.$$

Ниже будет показано, что эти же оценки справедливы и на горизонтальной ветви. Можно, поэтому, уже сейчас вычислить "безразмерную константу" Θ :

$$\Theta = 4AC/P^2 \approx 0.213$$

Горизонтальная ветвь.

На горизонтальной ветви возможен другой выбор $N(x)$:

$$N(x) = |x|/3 = -x/3 = (z^2 + 1/z)/3.$$

Множитель $1/3$ введен для того чтобы функция $N(x)$ сохраняла непрерывность в точке ветвления. Подставляя это выражение в формулы для коэффициентов $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$, получаем:

$$A(x) = [(1 + 1/z^3)/12]^2, \quad C(x) = 1,$$

$$B(x) = 2(z + 1/4z^2)(z^2 + 1/z)/3 - 1/3,$$

Нетрудно проверить, что функция $A(x)$ монотонно убывает по z , поэтому ее максимум достигается в точке ветвления, где

$$z^3 = 1/2.$$

Следовательно

$$|A(x)| \leq 1/16 = A.$$

Функция $B(x)$, наоборот, монотонно растет по z , поэтому в точке ветвления достигается ее минимум. Следовательно

$$B(x) \geq 7/6 \approx 1.166 > P.$$

Функция $C(x)$ постоянна и , значит,

$$|C(x)| = 1 = C.$$

Таким образом оценки, найденные на вертикальной ветви верны в целом.

Итак, имеем:

$$\theta_1 = 0.213, \quad \theta_1 = 0.0142, \quad \theta_1 = 0.0000512\dots$$

Поэтому уже третья итерация дает восемь верных знаков.

Заключение.

Традиционно считается, что оценки по абсолютной величине типичны для релаксационных систем. Для систем колебательных существенна интерференция и, поэтому, мало шансов на оценки по абсолютной величине. В этой статье показано, что можно, тем не менее, построить итерационный процесс с абсолютной и равномерной сходимостью, если выйти в комплексную плоскость и выбрать разумное нулевое приближение.

ИСТОРИЯ

Riccati Jacopo Francisco 1676-1754

Aequatio in Eruditorum, 1723.

Петр Первый 1672-1725

Московский Университет 1755 Татьянин день 25 января

ЛИТЕРАТУРА

Riccati J.F.

Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus.

Acta Eruditorum, 1723, p. 402 - 510;

Actorum Eruditorum Suplementa, 1724, v.8, p. 66-73

D'Alembert Jean Le Rond

Equation $z'' = \lambda\varphi(x)z$ $z(a) = z(b) = 0$ $y = z'/z$ 1763

Histoire de l'Academie de Berlin, 1770, v.19, p.244 et seq.

Wentzel G.

Eine Verallgemeinerung der Wellenmechanik.

Zeitschrift fur Physik, 1926, Bd38, S.518-529 (18-06-1926)

Brillouin L.

La mecanique ondulatoire de Schroedinger; une methode generale de resolution par approximations successives.

Comptes Rendus, 1926, v.183, p.24-26. (05-06-1926)

Kramers H.A.

Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung.

Zeitschrift fur Physik, 1926, Bd39, S.828-840. (09-09-1926)

Zwaan A.

Intensitaeten in Ca-Funken-Spektrum (Dissertation)

Archives Neerlandaises, 1929, v.12, p.1-76 (33-54)

Birkhoff G.D.

Quantum mechanics and asymptotic series.

Bulletin of the American Mathematical Society, 1933, v.39, p.681-700.

Langer R.E.

The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to the Stokes phenomena.

Bulletin of the American Mathematical Society, 1934, v.40, p.545-582.

Молчанов А.М.

Равномерная асимптотика линейных систем.

ДАН СССР, т.173, N 3, 1967.

Молчанов А.М.

Матричное уравнение Риккати.

В сб.:Качественные методы теории нелинейных колебаний, т.2,

Киев, "Наукова думка",1984.

Усл. печ. л. 1,0. Формат 60x90/16. Бумага офсетная. Тираж 128 экз. Заказ 6529Р.

Отпечатано с оригинала-макета, подготовленного Институтом математических проблем
биологии РАН, в Отделе научно-технической информации Пущинского научного центра РАН.

